

TD 1

correction des SF

SF de base

$$\triangleright u(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \pi/4)} \\ = \underline{U}_0 e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U}_0 = U_0 e^{j\pi/4}$$

$$\triangleright i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{i} = I\sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi)} \\ = \underline{I}_0 e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I}_0 = I\sqrt{2} e^{-j\varphi}$$

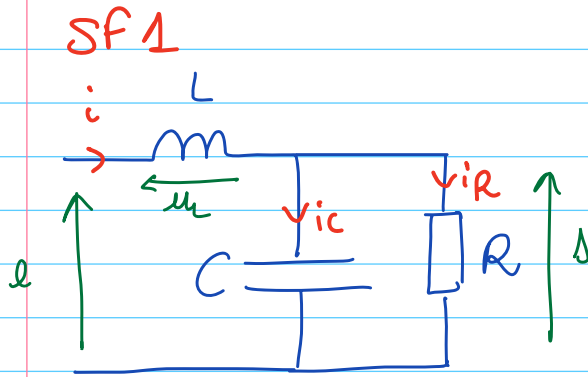
$$\triangleright s(t) = S_m \sin(\omega t) \\ = S_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{s} = S_m e^{j(\omega t - \pi/2)} \\ = \underline{S}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{S}_m = S_m e^{-j\pi/2}$$

$$\triangleright \underline{U}_m = U_m e^{-j\pi/3} \rightarrow u(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/3)$$

$$\triangleright \underline{I}_1 = -\frac{jU_0}{R} \rightarrow i(t) = \operatorname{Re}\left(-j\frac{U_0}{R} e^{j\omega t}\right) \\ = \operatorname{Re}\left(-j\frac{U_0}{R} \cos\omega t - j\frac{U_0}{R} j\sin\omega t\right) \\ = \operatorname{Re}\left(-j\frac{U_0}{R} \cos\omega t + \frac{U_0}{R} \sin\omega t\right) \\ = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$$

$$\triangleright \underline{I} = -I_m e^{j\pi/6} = I_m e^{j(\pi/6 + \pi)}$$

$$\rightarrow i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{7\pi}{6}\right)$$



ED directement :

On applique la loi des mailles : $e(t) = u_L(t) + s(t)$

$$= L \frac{di}{dt} + s(t)$$

D'après la loi des nœuds $i(t) = i_C(t) + i_R(t)$

Donc $e(t) = L \frac{di_C}{dt} + L \frac{di_R}{dt} + s(t)$

or $s(t) = R i_R$ et $i_C = C \frac{ds}{dt}$

Donc
$$e(t) = LC \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{ds}{dt} + s(t)$$

Sous forme canonique : $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s(t) = \frac{1}{LC} e(t)$

On identifie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$

d'où $Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

▷ Fonction de transfert directement

On a une impédance équivalente à R et C :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

$$\text{Donc } Z_{eq} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Pour le pont diviseur de tension, on a directement

$$\underline{\Delta} = \frac{Z_{eq}}{j\omega L + Z_{eq}} \underline{e}$$

$$\text{ie } \underline{H} = \frac{R/(1+j\omega RC)}{j\omega L + R/(1+j\omega RC)} = \frac{R}{j\omega L(1+j\omega RC) + R}$$

$$= \frac{R}{R + j\omega L - \omega^2 RLC} = \boxed{\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R} - \omega^2 LC}}$$

$$\text{On identifie } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{L}{R}$$

$$\text{d'où } Q = \frac{R}{L} \sqrt{LC} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

▷ Passage de l'ED à la fonction de transfert

$$\text{ED : } e(t) = LC \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$\text{On passe en complexes : } \underline{e} = LC (j\omega)^2 \underline{s} + \frac{L}{R} j\omega \underline{s} + \underline{s}$$

Donc $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2}$ (✓)

▷ Passage de la fonction de transfert à l'ED

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2} \Rightarrow \underline{e} = LC(j\omega)^2 \underline{s} + \frac{L}{R} j\omega \underline{s} + \underline{s}$$

Donc $e(t) = LC \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{ds}{dt} + s(t)$ (✓)

SF2

$$\text{On a } \underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

En **basse fréquence**, on a la fonction de transfert équivalente

$$\underline{H}_{BF} = 1$$

Donc $G_{BF} = 1$ et $G_{dB, BF} = 0$

et $\varphi_{BF} = 0$

En **haute fréquence**, on a la fonction de transfert équivalente

$$\underline{H}_{HF} = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

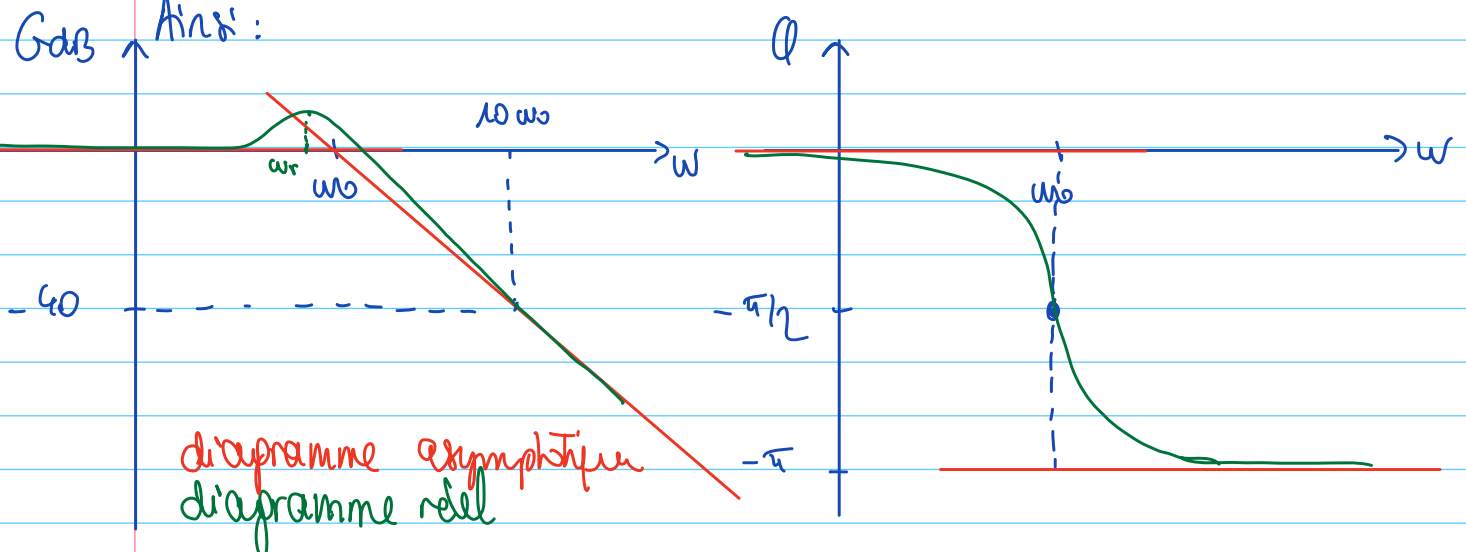
Donc $G_{HF} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ et $G_{dB, HF} = 20 \log \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$

$$= 20 \log \omega_0^2 - 40 \log \omega$$

et $\varphi_{HF} = -\pi$

↳ pente -40 dB/déc

Ainsi:



Pour tracer le diagramme réel, il faut calculer Q

$$\text{Ici } Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 1000 \times \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{0,1}}$$

$$= 10^3 \times \sqrt{10^{-7} \times 10}$$

$$= \underline{1}$$

Il y a donc résonance,
mais pas très marquée.

Sf3

1) $e(t) = E_0 (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t))$

Alors

$$s(t) = E_0 (G(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) + G(\omega_2) \cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2)) + G(\omega_3) \cos(\omega_3 t + \varphi(\omega_3)))$$

On lit graphiquement $G(\omega_1) = 10^{0/20} = 1$

$$G(\omega_3) = 10^{-40/20} = 10^{-2}$$

Par ailleurs, on sait que $G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ou $G_{dB}(\omega_0) = -3dB$)

Pour les phases, on lit graphiquement

$$\varphi(\omega_1) = 0 ; \quad \varphi(\omega_3) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}$$

Ainsi,
$$s(t) = E_0 \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}) + 10^{-2} \cos(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}) \right)$$

2) La pulsation $\frac{\omega_3}{1000}$ est très petite devant ω_0 : le signal d'entrée a donc une très grande partie (voire toutes) ses composantes dans la bande passante : le signal de sortie est donc le même que le signal d'entrée.

3) Pour un signal de pulsation 1000 rad/s, le filtre aura un effet moyenneur : en sortie, on aura un signal constant valant la valeur moyenne du signal d'entrée.

SF4

1) **Filtre 1** : passe-bas, a priori d'ordre 2 (pente -40 dB/déc)

$$\text{On peut proposer } \underline{H_1} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec } H_0 = 10^{40/20} = 100$$
$$\omega_0 = 2\pi \times 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$$

Pour proposer une valeur de Q , il faudrait le tracé réel.

Filtre 2 : passe-bande, a priori ordre 2

$$\text{On peut proposer } \underline{H_2} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec } \omega_0 = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

Pour proposer une valeur de H_0 et Q , il faudrait le diagramme réel

Filtre 3 : passe-haut, a priori d'ordre 1 (pente $+20 \text{ dB/déc}$)

$$\text{On peut proposer } \underline{H_3} = \frac{H_0 j\omega/\omega_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{avec } \omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } H_0 = 10^{-20/20} = 0,1.$$

2) Seul le filtre 2 peut être un intégrateur simple pour des signaux de pulsation supérieures à 1000 rad.s^{-1} , car on a alors une pente -20 dB/déc .

Pour obtenir un dérivateur, il faut une pente $+20 \text{ dB/déc}$ sur le diag. de Bode

C'est le cas pour le filtre 2 pour des pulsations inférieures à 1000 rad.s^{-1} ou pour le filtre 3 pour des pulsations inférieures à 100 rad.s^{-1} .

SF 5

Système 1: les composantes basse fréquence (fondamental or 2^e harmonique) sont conservées
l'harmonique de rang 3 est très atténuée
les harmoniques de rang 4 et 5 sont filtrés

Il s'agit donc d'un passe-bas de fréquence propre proche de $2f$.

Système 2: l'harmonique de rang 3 est conservé
les voisines de rang 2 et 4 sont conservées mais atténuées

Il s'agit donc d'un passe-bande de fréquence propre proche de $3f$

Système 3: on voit l'apparition d'harmoniques non présente ni le spectre du signal d'entrée

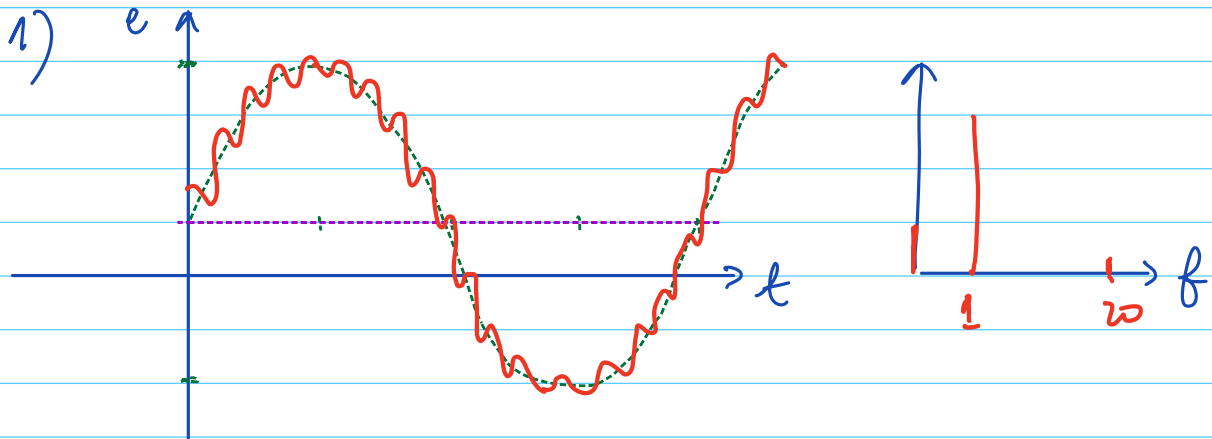
Ce système n'est donc pas linéaire.

SFG

- 1) Non, ce n'est pas possible car la DSF du signal n'a aucune composante à 10 kHz (pas multiple impaire de 3 kHz)
- 2) Oui, il faut un passe bande très sélectif ($Q \gg 1$) de fréquence propre 9 kHz. On sélectionne ainsi l'harmonique de rang 3 de la DSF du signal d'entrée.
- 3) Oui, il faut un filtre intégrateur. On peut proposer un passe bas d'ordre 1 ou fréquence de coupure de l'ordre de qq centaines de Hz.
- 4) Oui, il suffit de prendre un filtre coupant toutes les composantes de soit un passe bas de fréquence propre $\ll 3 \text{ kHz}$
 haut $\gg 3 \text{ kHz}$.

TDE1

Exercice 2 - Filtrage



2) $e(t) = 1 + 3 \cos(2\pi \times 1000 t) + 0,1 \cos(2\pi \times 10000 t + \pi/2)$

- 3) 1) Il ne reste que la composante continue
2) composante continue $\oplus$ fondamental
3) signal conservé

4) signal rendu alternatif
5) seul le bruit est conservé

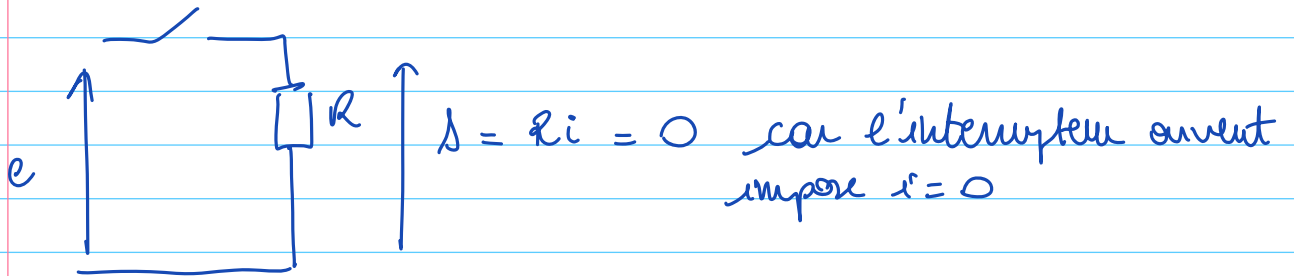
6) la composante continue est coupée, le fondamental légèrement atténué et le bruit conservé

7) seul le bruit est conservé

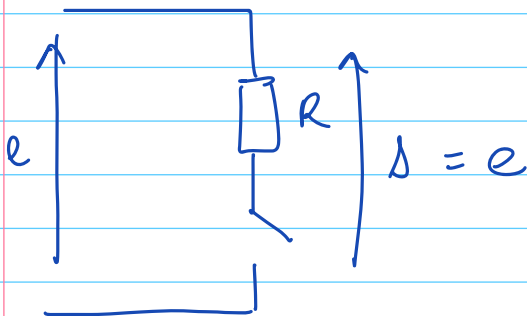
8) Bruit + valeur moyenne conservés

Exercice 3 - passe-haut

1) Le circuit équivalent en basse fréquence est



En haute fréquence:



Il s'agit donc d'un filtre passe-haut

2) Par le pont diviseur de tension:

$$\underline{\Delta} = \underline{e} \times \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{H} = \frac{Rj\omega C - LC\omega^2}{1 + Rj\omega C - LC\omega^2}$$

$$RC = \frac{1}{\omega_0 Q} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{Rc}$$

$$\text{Posons } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On a alors $\underline{H} = \frac{j\omega/Q - \omega^2}{1 + j\omega/Q - \omega^2}$.

3) En basses fréquences, la fonction de transfert équivalente est $\underline{H}_{BF} = \frac{j\omega/Q}{1} = j \frac{\omega}{Q}$

On a alors $G_{dB}(\omega) = 20 \log \omega - 20 \log Q$

↳ d'où une pente +20 dB/décade

en hautes fréquences, on a $\underline{H}_{HF} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2} = 1$

d'où une pente nulle

Par ailleurs, on a sur l'asymptote BF le point (1, -20)

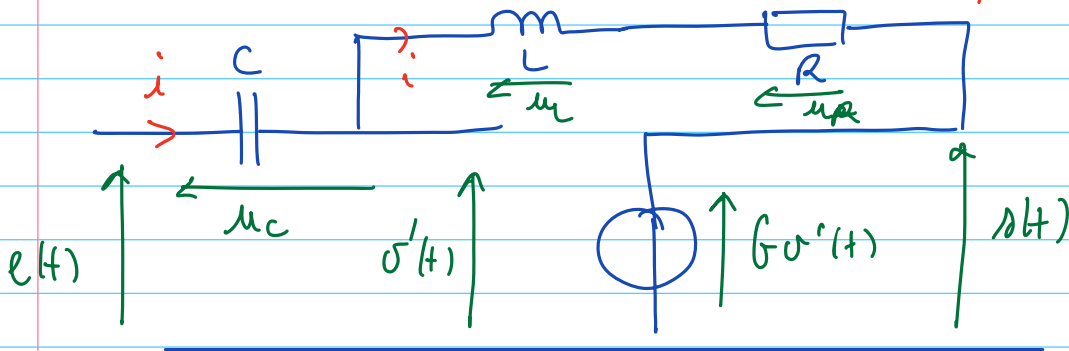
Donc $20 \log 1 - 20 \log Q = -20$

Donc $\log Q = 1$ et $\boxed{Q = 10}$.

4) Si la fréquence du signal est très petite devant la fréquence propre du circuit, tous les composants sont sur la pente à +20 dB/déc. Le circuit a alors un rôle d'inverseur très atténuant. Il est donc logique d'obtenir un signal carré très atténué.

Si la fréquence du signal est seulement légèrement inférieure à la fréquence propre du circuit, les composantes basses sont atténuées, mais les hautes fréquences conservées. D'où l'obtention d'un signal formé d'une succession d'impulsions.

Exercice 4 - Stabilité d'un circuit électrique



1) On a $e(t) = s(t) + u_R + u_L + u_C$ par une loi des mailles

$$\text{i.e. } e(t) = s + Ri + L \frac{di}{dt} + u_C$$

$$= s + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C$$

or, on a également $e = u_C + o'(t)$ par une loi des mailles.

ayant $s = G o'$, on a donc $u_C = e - \frac{s}{G}$

d'où

$$e(t) = s + RC \left(\frac{de}{dt} - \frac{1}{G} \frac{ds}{dt} \right) + LC \left(\frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{1}{G} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) + e - \frac{s}{G}$$

$$\text{i.e. } GRC \frac{de}{dt} + GLC \frac{d^2 e}{dt^2} = s(1-G) + RC \frac{ds}{dt} + LC \frac{d^2 s}{dt^2}$$

2) Le circuit est stable si tous les coefficients du 1^{er} membre de l'ED sont de même signe

i.e. si $1-G > 0$

i.e. $G < 1$ le montage n'est pas stable.

3) $s(t)$ aura au moins un terme exponentiel divergent.

$$\Delta = (RC)^2 - 4(1-G)LC \stackrel{G=2}{=} (RC)^2 + 4LC > 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(t) &= A \exp\left(\frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} t\right) + B \exp\left(\frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} t\right) \\ &= A \exp\left(\frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} t\right) + B \exp\left(-\frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} t\right) \end{aligned}$$

$$\text{or } \sqrt{\Delta} = \sqrt{(RC)^2 + 4LC} > RC$$

$$\text{Donc } -RC + \sqrt{\Delta} > 0$$

$$\text{Ainsi } A \exp\left(\frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} t\right) \text{ diverge, ce qui est cohérent avec le caractère instable du montage}$$

Pour aller + loin

Exercice 5 - Filtrage

1) On peut faire une analyse de Fourier : si le spectre obtenu a un seul pic, le signal est bien sinusoïdal.

2) Le signal d'entrée n'est pas alternatif car il a une moyenne non nulle.

En revanche, la sortie est alternative.

Cela est cohérent avec la nature du filtre : le passe-bande ne laisse pas passer la composante continue.

3) Expérience 1 : un harmonique est égal à la fréquence propre du passe bande

Il est donc amplifié tandis que les autres harmoniques sont atténués

Expérience 2 : la majorité des harmoniques sont au niveau d'une asymptote - 20dB/dec. Le filtre a alors un rôle intégrateur. L'amplitude est tout de même très atténuée

4) Tout d'abord, l'expérience 1 est telle que la fréquence de sortie est la fréquence propre du filtre (puisque l'amplitude diminue si on augmente ou diminue la fréquence du circuit).

Ainsi

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{5 \times 50 \cdot 10^{-6}} = \underline{2,5 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Par ailleurs, le fondamental est l'harmonique sélectionné (puisque la fréquence en sortie est celle de l'entrée).

On peut donc par ailleurs que le signal de sortie est sinusoïdal.

Ainsi

$$S_0 = \underset{\substack{\text{amplitude} \\ \text{du signal sinusoïdal} \\ \text{en sortie}}}{|H(\omega)|} \times \underbrace{\frac{2V_0}{\pi(2 \times 0 + 1)}}_{\text{amplitude du fondamental}} = H_0 \times \frac{2V_0}{\pi}$$

On a donc $H_0 = \frac{\pi S_0}{2V_0} = \frac{\pi \times 3 \times 10^4}{7 \times 10^4 \times 10^{-4}} \approx 10$.

Enfin, dans l'expérience 2, on a un comportement intégrateur:

$$\underline{H}_{HF} = \frac{H_0}{j\Omega \frac{w}{w_0}} = \frac{\Delta}{\underline{e}}$$

Donc $\underline{e} = j\Omega \frac{Q}{H_0 w_0} \Delta$

Toutes les composantes sauf la composante continue sont dans ce domaine HF. On a donc

$$e(t) - \frac{V_0}{2} = \frac{Q}{H_0 w_0} \frac{ds}{dt}$$

On a donc $Q = \frac{H_0 w_0}{ds/dt} \left(e(t) - \frac{V_0}{2} \right)$

en particulier $\forall t \in [0, T]$, on a $e(t) = V_0 = 2 \times 2 = 4V$.

$\frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7 \times 0,2}{2 \times 10^{-6}} = 10^5 V/s$
 on monte de 5 carreaux
 de 0,2 V
 en 2 carreaux de 5 μs.

au final $Q = \frac{10 \times 2,7 \cdot 10^4}{10^5} \left(4 - \frac{4}{2} \right) = 5$.

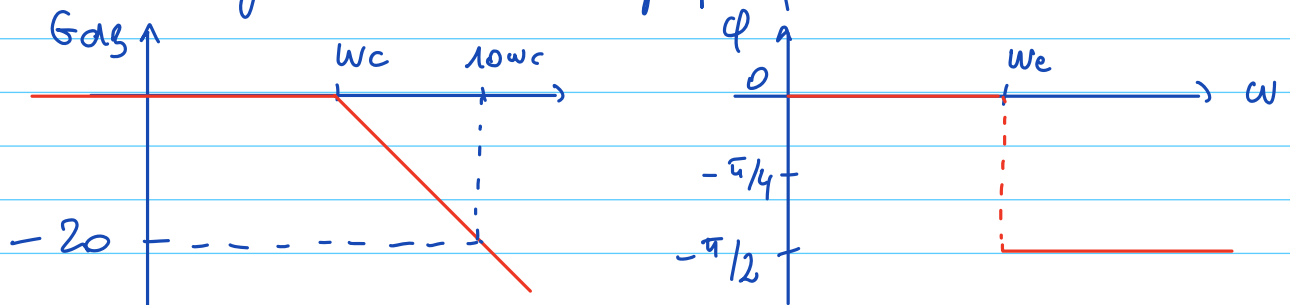
Exercice 6 - Mesure d'impédance par détection synchrone

1) R, C est un filtre passe-bas d'ordre 1.

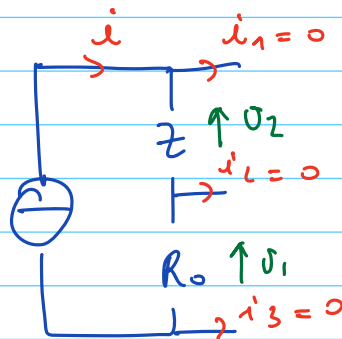
Un filtre passe-bas d'ordre 1 peut servir de moyenneur ou d'intégrateur (selon sa pulsation de coupure par rapport à la pulsation du signal d'entrée)

On a $H = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (cf cours)

et son diagramme de Bode asymptotique :



2) On a



car l'impédance d'entrée du multiplexeur est ∞ .

on a donc $\underline{\sigma}_1 = R_o \underline{i}$ et $\sigma_1(t) = R_o I_o \cos(\omega t)$

et $\underline{\sigma}_2 = \underline{Z} \underline{i} = X I_o e^{j\omega t} + j Y I_o e^{j\omega t}$
 $= X I_o (\cos \omega t + j \sin \omega t) + j Y I_o (\cos \omega t + j \sin \omega t)$

$$v_2(t) = \operatorname{Re}(\underline{v}_2) = X I_0 \cos \omega t - Y I_0 \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad v_1 e^{j\omega t} \times v_2 e^{j(\omega t + \varphi)} &= v_1 v_2 (\cos \omega t + j \sin \omega t) (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) \\ &= v_1 v_2 (\cos \omega t \times \cos(\omega t + \varphi) - \sin \omega t \times \sin(\omega t + \varphi) + j \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ann: } \operatorname{Re}(v_1 e^{j\omega t} \times v_2 e^{j(\omega t + \varphi)}) &= v_1 v_2 (\cos \omega t \times \cos(\omega t + \varphi) - \sin \omega t \times \sin(\omega t + \varphi)) \\ &\neq 0 \\ &\neq v_1 v_2 \cos \omega t \times \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad v_3(t) &= k v_1(t) v_2(t) \\ &= k I_0^2 R_0 (X \cos^2 \omega t - Y \cos \omega t \sin \omega t) \end{aligned}$$

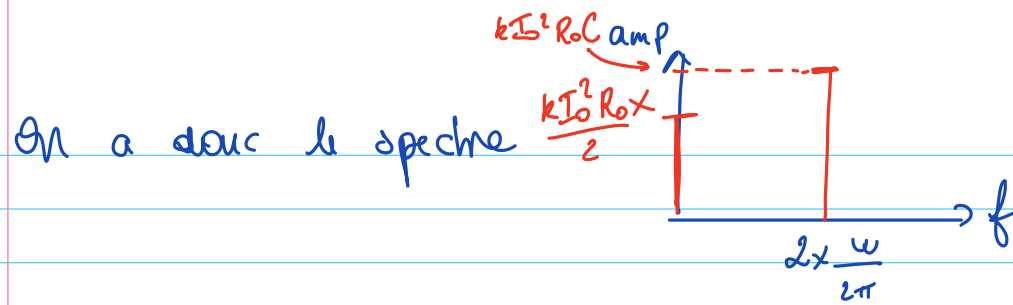
$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{et } \cos \theta \times \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \\ &= k I_0^2 R_0 \left(X \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} - Y \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) \\ &= k I_0^2 R_0 \left(\frac{X}{2} + \frac{X}{2} \cos(2\omega t) - \frac{Y}{2} \sin(2\omega t) \right) \\ &= k I_0^2 R_0 \left(\frac{X}{2} + C \cos(2\omega t + \varphi) \right) \\ &\quad \text{avec } C = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{2} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \cos(2\omega t + \varphi) &= (C \cos \varphi) \cos(2\omega t) - (C \sin \varphi) \sin(2\omega t) \\ &= \frac{X}{2} \quad \quad \quad = -\frac{Y}{2} \end{aligned}$$

$$(C \cos \varphi)^2 + (C \sin \varphi)^2 = C^2 = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{2}$$

$$\text{et } \sin \varphi > 0$$

$$\text{Donc } \cos \varphi = \frac{X}{2C} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$$



5) Si R_1 et C_1 sont choisis de sorte que $R_1 C_1$ soit un moyenneur, on ne conserve en sortie que la valeur moyenne du signal v_3

ie $k I_0^2 R_0 \frac{X}{2}$. $\Rightarrow$ on peut déduire X .

Pour cela, il faut que le fondamental à 2ω soit filtré ie

$$\frac{1}{R_1 C_1} \ll 2\omega \quad \text{ie} \quad R_1 C_1 \gg \frac{1}{2\omega}$$

$$\begin{aligned} 6) \text{ On aurait alors } v_2(t) &= \operatorname{Re} \left(\frac{I_0 e^{j\omega t}}{j\omega C_0} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{I_0}{\omega C_0} (j \cos \omega t - \sin \omega t) \right) \\ &= -\frac{I_0}{\omega C_0} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Lors de la multiplication, c'est donc le terme en sinus qui amènera une composante constante.

Par le même raisonnement on aurait donc accès à $\dot{V}$.

Exercice 1- apports à la correction en classe

3) Evaluons Q :

$$Q = \frac{RR'}{R+R'} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{6 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-6}}{0,1}}$$
$$= \frac{18 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^3} \sqrt{10^{-5}} = 6,3 > \frac{1}{2}$$

le régime est donc pseudo-périodique et

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right) \quad A, B \in \mathbb{R}$$
$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Déterminons A et B.

$$\text{On a } \begin{cases} u(0^+) = 0 \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{0^+} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{E}{RC} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } e^0 (A \cos 0 + B \sin 0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{alors } \frac{du}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \sin(\Omega t) + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \Omega \cos(\Omega t)$$

$$\text{et en } 0^+ : \frac{E}{RC} = 0 + B \Omega \Rightarrow B = \frac{E}{RC \Omega}$$

$$u(t) = \frac{E}{RC \Omega} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\Omega t)$$

4) Ainsi on a
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $H_0 = \frac{R}{R+R'}$, $Q = \frac{RR'}{R+R'} \sqrt{\frac{C}{L}}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Pour tracer le diagramme de Bode, déterminons les fonctions de transfert équivalentes en BF et HF :

En BF
$$\underline{H}_{BF}(\omega) = \frac{H_0}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} = j \frac{H_0 \omega}{Q \omega_0}$$

Ainsi
$$G_{dBf} = 20 \log \left(\frac{H_0 \omega}{Q \omega_0} \right) = \underline{20 \log \left(\frac{H_0}{Q \omega_0} \right) + 20 \log \omega}$$

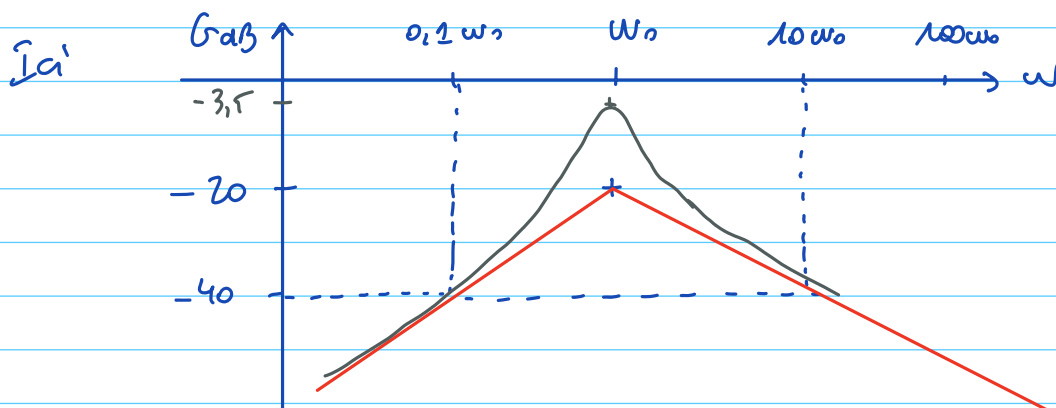
En HF
$$\underline{H}_{HF}(\omega) = \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = -j \frac{H_0 \omega_0}{Q \omega}$$

Ainsi
$$G_{dBHF}(\omega) = 20 \log \left(\frac{H_0 \omega_0}{Q \omega} \right) = \underline{20 \log \left(\frac{H_0 \omega_0}{Q} \right) - 20 \log \omega}$$

On a donc 2 décades de pente $+20\text{dB/déc}$ et -20dB/déc

Leur intersection a lieu en $\omega = \omega_0$ au point d'ordonnée $20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right)$

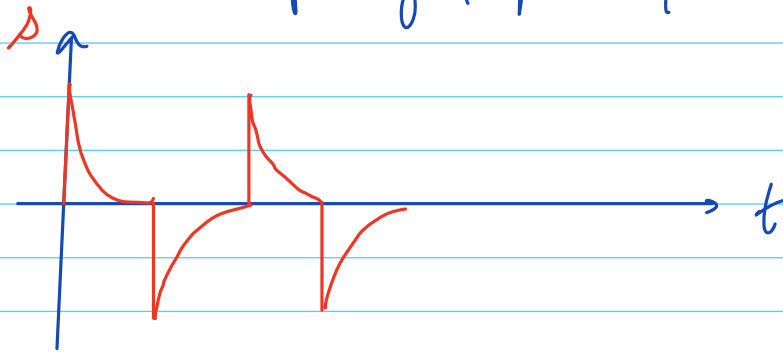
ici
$$\frac{H_0}{Q} = \frac{R}{R+R'} \times \frac{R+R'}{RR'} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,1$$



Rq: le vrai Bode est au dessus des asymptotes car $Q > 1$

3) Si $Q=1$ le filtre n'est pas très sélectif.

$f_0 \gg 3\text{kHz}$, donc la majorité du spectre est sur la partie dérivateur du filtre. On aura donc des pics positifs pour les fronts montants du carré et des pics négatifs pour les fronts descendants.



10) Par le même raisonnement, le signal est maintenant dans la partie intégrateur :

